Компьютерная обработка данных в одной многомерной математической задаче

В. В. Крутских, e-mail: krutskihvlad@mail.ru
А. В. Лобода, e-mail: lobvgasu@yandex.ru

Воронежский Государственный Университет

Аннотация. *За счет использования компьютерных алгоритмов задача изучения 7-мерных невырожденных по Леви орбит в* $\mathbb{C}^4$ *вещественных 7-мерных нильпотентных неразложимых алгебр Ли доведена до практического завершения.*

Ключевые слова: *Алгебра Ли, коммутационные соотношения, многомерный массив, символьные вычисления.*

Введение

Информацию, связанную с задачей описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств, предлагается обрабатывать с помощью компьютерных алгоритмов. Ниже описывается компьютерная методика изучения голоморфных реализаций 7-мерных алгебр Ли.

Исследование и, в частности, интегрирование отдельной алгебры, допускающей такую реализацию, является относительно несложной задачей. Главной причиной, требующей привлечения компьютерных технологий, является большое количество различных многомерных алгебр Ли. Так, количество типов вещественных нильпотентных (неразложимых) 7-мерных алгебр Ли, изучаемых в настоящей работе, равно 149 (см. [1]).

Использование компьютерных алгоритмов позволило разделить этот массив алгебр Ли на блоки, отличающиеся возможностями их реализации в виде алгебр векторных полей на невырожденных гиперповерхностях пространства $\mathbb{C}^4$. Большая часть обсуждаемых алгебр, как оказалось, не допускает таких реализаций. Меньшая часть, содержащая 14 различных типов алгебр Ли, доводится до построения невырожденных орбит представителей этого блока.

1. Абелевы идеалы и абелевы подалгебры

Алгебра Ли – это линейное пространство с антикоммутативным умножением. Всякая 7-мерная алгебра Ли описывается своей «таблицей умножения», т.е. множеством коммутационных соотношений вида

$$[e_i;e_j]=\sum_{k=1}^{7}\alpha_k e_k \qquad (1)$$

где $e_1 \ldots e_7$ - какой-либо базис обсуждаемой алгебры.

Для компьютерной обработки информации о каждой конкретной алгебре Ли необходимо представить такую алгебру (ее коммутационные соотношения) в удобном виде. Для этого используем предложенное в [1] описание коммутационных соотношений в виде 3-мерного массива. Например коэффициенты α_k из соотношения (1) запишем в массив: $(i, j, k)=\alpha_k$, $(j, i, k)=-\alpha_k$ для всех k. Так мы получим 14 записей в массиве. Аналогично описываем все коммутаторы алгебры и получаем (компьютерное) представление (абстрактной) алгебры Ли.

Опыт изучения реализаций 5-мерных алгебр Ли в пространстве трех комплексных переменных показывает важную роль максимальных абелевых идеалов и абелевых подалгебр исходных алгебр.

Для поиска абелевых идеалов и подалгебр 7-мерных алгебр Ли были написаны следующие процедуры в пакете Maple:

Листинг 1

Процедура для поиска абелевых идеалов

```
ideal_chek := proc(A, n, B, m)
local i, j, k;
for i to n do
for j to m do
for k to n do
if A[i, B[j], k] <> 0 and member(k, B) = false then
return;
end if;
end do;
end do; end do;
for i to m do
for j to m do
for k to n do
if simplify(A[B[i], B[j], k] - A[B[j], B[i], k] <> 0) then
return;
end if;
end do;
end do;
end do;
return print(B);
end proc;
```

Листинг 2

Процедура для поиска абелевых подалгебр

```
subalg_chek := proc(A, n, B, m)
```

```
local i, j, k;
for i to m do
for j to m do
for k to n do
if simplify(A[B[i], B[j], k] - A[B[j], B[i], k] <> 0) then
return 0;
end if;
end do;
end do;
end do;
return B;
end proc;
```

В результате выполнения программ установлено, что из 149 нильпотентных алгебр Ли 72 алгебры имеют 4-мерный максимальный абелев идеал, 73 алгебры – 5-мерный абелев идеал и 4 алгебры – 6-мерный идеал.

Отметим, что алгоритм поиска абелевых идеалов был реализован в [2], на начальной стадии изучения задачи. В процессе ее исследования алгоритм дополнялся различными уточнениями. Например, при изучении реализаций в $\mathbb{C}^4$ алгебр Ли с максимальным 4-мерным абелевым идеалом оказывается важным количество различных абелевых подалгебр (той же размерности 4) у конкретных алгебр Ли.

Ниже мы обсудим подробно случай 5-мерных идеалов.

2. Алгебры с 5-мерным абелевым идеалом

В этом случае оказалось существенным свойство коммутирования элементов из дополнения к идеалу с подалгебрами самого такого идеала.

Для описания такого свойства была реализована программа, определяющая количество алгебр в начальном массиве (из 73 алгебр Ли), в которых базисные элементы из дополнения к 5-мерному идеалу коммутируют с m (базисными) элементами идеала при $m = 2, 3, 4$.

Здесь для каждого (базисного) элемента из дополнения к 5-мерному идеалу отдельной алгебры составляется 2-мерный массив, в который входят коэффициенты из начального (3-мерного) описания обсуждаемой алгебры Ли. Пусть, например, задана абстрактная алгебра, у которой идеал $I_5 =< e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 >$, а дополнением к нему является $< e_1, e_2 >$. Для поля e_1 составим матрицу коэффициентов разложений $[e_1; e_k] = \sum \alpha_{kl} e_l$, $k, l = \overline{3, 7}$.

Таблица 1

Таблица коэффициентов разложений

	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_3	α_{33}	α_{43}	α_{53}	α_{63}	α_{73}
e_4	α_{34}	α_{44}	α_{54}	α_{64}	α_{74}
e_5	α_{35}	α_{45}	α_{55}	α_{65}	α_{75}
e_6	α_{36}	α_{46}	α_{56}	α_{66}	α_{76}
e_7	α_{37}	α_{47}	α_{57}	α_{67}	α_{77}

Такие матрицы составляются для двух полей дополнения, и считается число нулевых столбцов в них. Это число говорит нам о том, со сколькими полями идеала коммутирует поле из дополнения.

Подсчет количества нулей в столбце реализуется несложной процедурой в Maple. Также написана процедура для формирования подобного рода матриц и сравнения числа нулевых столбцов с определенным константным значением:

Листинг 3

Процедура для формирования матриц

```
th_chek:=proc(A,n,B,m)
local i,j,k,Dop,kk,H1,H2,podalg;
Dop:=vector(2);
kk:=1:
for i to 7 do
if member(i,B)=false then
Dop[kk]:=i:
kk:=kk+1:
end if;
end do:
H1:=array(sparse,1..7,1..5):
H2:=array(sparse,1..7,1..5):
for i to 5 do
for j to 7 do
H1[j,i]:=Alg[Dop[1],B[i],j]:
H2[j,i]:=Alg[Dop[2],B[i],j]:
end do;
end do;
podalg:=e[B[1]],e[B[2]],e[B[3]],e[B[4]],e[B[5]];
if nul_chek(H1,7,5) >3 or nul_chek(H2,7,5) >3 then
return(print(podalg,"Вырожденные орбиты"));
else
return(print(podalg,"Не факт, что вырожденные"));
end if;
end proc:
```

В ходе выполнения такой программы было установлено, что 22 из 73 алгебр имеют в дополнении к 5-мерному идеалу хотя бы одно поле, которое коммутирует с 4-мерной подалгеброй идеала. В [3] показано, что такие алгебры автоматически имеют только вырожденные по Леви орбиты.

Имеется еще 39 алгебр, у которых хотя бы одно поле из дополнения коммутирует с 3-мерной подалгеброй идеала, и 12 алгебр, у которых хотя бы одно поле коммутирует с 2-мерной подалгеброй. Для их изучения предлагается использовать еще один традиционный математический прием, переходя к «стандартным базисам» изучаемых алгебр.

3. Стандартные базисы алгебр с 5-мерным идеалом

У любой из алгебр с обозначенными выше свойствами можно ввести базис, более естественно отражающий эти свойства и отличающийся, вообще говоря, от начального базиса работы [1].

Мы учтем, что у всех 39 + 12 = 51 рассматриваемых алгебр Ли имеется нетривиальный центр. У 21 алгебры из 39 этот центр является двумерным и содержится в 5-мерном идеале; у 13 алгебр из 39 центр является одномерным, и он также содержится в соответствующем 5-мерном идеале. Оставшиеся 5 алгебр из 39 мы здесь не обсуждаем, их исследование можно провести в «ручном режиме».

Рассмотрим сначала произвольную 7-мерную алгебру Ли, у которой в дополнении к 5-мерному абелеву идеалу I_5 имеется элемент коммутирующий с 3-мерной подалгеброй h_3 этого идеала.

Обозначим такой элемент через E_1, а базис Гонга 3-мерной подалгебры h_3, с которой коммутирует E_1, через E_5, E_6, E_7. При этом будем считать E_6 и E_7 элементами центра. Отметим, что их можно переставлять, так же, как и элементы E_3 и E_4, входящие в 5-мерный идеал, но не в подалгебру h_3. При работе с начальными базисами Гонга второй элемент из дополнения к I_5 (однозначно определяемый введенными договоренностями) обозначим через E_2.

В пакете Maple был разработан и реализован алгоритм, позволяющий, в дополнение к описанным программам, перевести обозначения Гонга для базисов алгебр в наши обозначения. Ниже приведены таблицы умножения (коммутационные соотношения) в новых обозначениях.

Таблица 2

21 алгебра

Алгебра	$[E_1; E_2]$	$[E_1; E_3]$	$[E_1; E_4]$	$[E_2; E_3]$	$[E_2; E_4]$	$[E_2; E_5]$
$27B$		$-E_6$	E_7	E_7		E_6
$257D$	$-E_5$	E_6	E_7	E_7		E_6
$257E$		$-E_7$	E_6	E_5		E_6
$257G$		$-E_7$	E_6	E_5	E_7	E_6
$257H$		$-E_6$	E_7	E_5		E_6
$257J$	$-E_3$	E_6	E_7	E_7		E_6
$247I$		$-E_5$	E_6	$-E_4$	E_7	E_6
$247M$	$-E_4$	$-E_6$	E_7	E_5		E_6
$247N$	$-E_4$	E_7	E_6	E_5		E_6
$247O$	$-E_4$	$-E_7$	E_6	E_5	E_7	E_6
$247P$	$-E_4$	$-E_5$	E_6	$-E_4$		E_6
$2457D$	$-E_3$	E_6	E_6	E_5	E_7	E_6
$2457E$	$-E_3$	E_7	E_7	E_5		E_6
$2457H$	$-E_3$	E_7	E_6	E_5		E_6
$2457I$	$-E_3$	E_6	E_7	E_5		E_6
$2457J$	$-E_3$	$E_6 + E_7$	E_7	E_5		E_6
$2457K$	$-E_3$	E_7	E_6	E_5	E_7	E_6
$2457M$	$-E_3$	E_5	E_6	E_4	E_7	E_6
$2357A$		$-E_5 - E_7$	$-E_6$	E_4	E_5	E_6
$2357B$	$-E_7$	$-E_5$	$-E_6$	E_4	E_5	E_6
$23457E$	$-E_3$	$E_5 + E_7$	E_6	E_4	E_5	E_6

Таблица 3

13 алгебр

	$[E_1;E_2]$	$[E_1;E_3]$	$[E_1;E_4]$	$[E_2;E_3]$	$[E_2;E_4]$	$[E_2;E_5]$	$[E_2;E_6]$
$137A$		E_4	E_7			E_6	E_7
$137C$		$-E_6$	$-E_7$	E_4		E_6	E_7
$1357G$	$-E_3$	E_4	E_7			E_6	E_7
$1357I$		$-E_4$	E_7	$-E_5$		E_6	E_7
$1357O$	E_3	E_6	E_7	E_4		E_6	E_7
$1357Q$	E_3	E_4	E_7	E_6		E_6	E_7
$13457B$	$-E_3$	E_7	E_7	E_5		E_6	E_7
$13457F$	$-E_3$	E_4	E_7	E_5		E_6	E_7
$12457A$		$-E_6$	$-E_7$	E_4	E_5	E_6	E_7
$12457B$		$-E_6-E_7$	$-E_7$	E_4	E_5	E_6	E_7
$123457D$	$-E_3$	E_6	E_7	E_4	E_5	E_6	E_7
$123457E$	$-E_3$	E_6+E_7	E_7	E_4	E_5	E_6	E_7
$1357Q_1$	E_3	E_4	$-E_7$	E_6		E_6	E_7

За счет сходства последних позиций отдельных строк этих таблиц обсуждения многих включенных в них алгебр удается проводить единообразно. В частности, несложными математическими рассуждениями устанавливается невозможность реализации в виде алгебр векторных полей на невырожденных гиперповерхностях в пространстве $\mathbb{C}^4$ для (20 + 7) = 27 алгебр из этих таблиц.

Аналогично упрощаем базисы 12 алгебр, в которых элемент дополнения к 5-мерному идеалу коммутирует лишь с двумя элементами идеала. Здесь за счет использования стандартных базисов также устанавливается невозможность реализации 8 алгебр в пространстве $\mathbb{C}^4$. Еще для 4-х алгебр из этих 12 аналогичная невозможность доказывается в «индивидуальном порядке».

4. Интегрирование алгебр Ли

С учетом сказанного выше, из всех 73 обсуждаемых алгебр Ли, имеющих 5-мерный идеал, остаются лишь 7 алгебр ($137A$, $137C$, $1357G$, $1357O$, $1357Q$, $247P_1$, $1357Q_1$), для которых потенциально возможны реализации в виде алгебр векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^4$. Эти алгебры действительно допускают такие реализации. Техника упрощения базисов таких 7-мерных алгебр описана, например, в [4].

Так, каждый элемент базиса $e_1 \dots e_7$ обсуждаемой алгебры Ли g представляется в виде голоморфного векторного поля

$$e_k = a_k(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + b_k(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + c_k(z)\frac{\partial}{\partial z_3} + d_k(z)\frac{\partial}{\partial z_4}, \ (k = \overline{1,7}) \tag{2}$$

в пространстве $\mathbb{C}^4$. Здесь $a_k(z)$, $b_k(z)$, $c_k(z)$, $d_k(z)$ – голоморфные (вблизи обсуждаемой поверхности) функциональные коэффициенты, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ – вектор комплексных координат. Для удобства используется сокращенная запись $e_k : (a_k, b_k, c_k, d_k)$ формулы (2).

Используя эту технику и договоренности, например, базис алгебры 137A можно привести голоморфными заменами координат к виду

$$\begin{gathered}
e_1 : (1, 0, 0, 0);\\
e_2 : (A_2, B_2, -z_2 + C_2, -z_3 + D_2);\\
e_3 : (0, A_2^2, -A_2 D_4 - A_2 z_1, \frac{1}{2} z_1^2 + D_4 z_1 + D_3);\\
e_4 : (0, 0, -A_2, z_1 + D_4);\\
e_5 : (0, 1, 0, 0);\\
e_6 : (0, 0, 1, 0);\\
e_7 : (0, 0, 0, 1);
\end{gathered} \tag{3}$$

Вещественная гиперповерхность $M = \{\Phi = 0\}$ является орбитой (интегральной поверхностью) голоморфной реализации алгебры Ли g, если для каждого базисного поля этой алгебры выполняется условие касания M в виде

$$\Re e\{e_k(\Phi)|_M\} = 0 \tag{4}$$

Получаемые достаточно громоздкие системы уравнений в частных производных также удобно интегрировать с использованием символьных вычислений (см. [5]) и соответствующих процедур. Разработана еще одна программа, дополняющая упомянутый выше комплекс программ, с помощью которой установлено, что орбиты (интегральные поверхности) всех 7 алгебр из этого раздела могут быть только вырожденными по Леви.

Заключение

Реализованные с использованием пакета Maple алгоритмы позволили найти все абелевы идеалы и подалгебры всех 149 нильпотентных 7-мерных алгебр Ли. С помощью разработанных программ исследованы 7-мерные орбиты в $\mathbb{C}^4$ у всех 73 алгебр Ли (из обсуждаемых 149), имеющих 5-мерный абелев идеал. Любая из таких орбит может быть только вырожденной (по Леви) гиперповерхностью в $\mathbb{C}^4$.

Планируется регистрация комплекса разработанных программ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект N 20-01-00497).

Список литературы

1. Gong, M.-P. Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algebraically Closed Fields and R) / M.-P. Gong – University of Waterloo, 1998. – 165 c.
2. Крутских, В. В. Интегрирование 7-мерных алгебр Ли с использованием символьных вычислений / В. В. Крутских, А. В. Лобода // Материалы XX международной научно-методической конференции “Информатика: проблемы, методология, технологии”. – Воронеж. – 2020. – С. 579-586.
3. Лобода, А. В. О задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей 4-мерных комплексных пространств / А. В. Лобода // Труды МИАН. – 2020. – Т. 331. – С. 194-212.
4. Лобода, А. В. On the orbits of nilpotent 7-dimensional Lie algebras in 4-dimensional complex space / А. В. Лобода, Р. С. Акопян, В. В. Крутских // Журнал СФУ, Математика и физика. – 2020. – № 3, С. 360-372.
5. Дьяконов, В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании/ В. П. Дьяконов – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720с.